Développement : Théorème d'inversion locale.

RM

2022-2023

Référence :

1. Calcul diff Rouvière

Énoncé :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible, i.e $\det Df(a) \neq 0$.
Il existe alors un ouvert V contenant a (et contenu dans U) et un ouvert W contenant $b = f(a)$, tels que f (restreinte à V)soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur $W = f(V)$.

Démonstration : Quitte à effectuer des translations qui sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = f(0) = 0$. On note $A = Df(0)$ et pour $x \in U$, $y \in \mathbb{R}^n$ on pose $F_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x))$.
Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Alors F_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car f est $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} F_y(x+h) = x + h + A^{-1}(y - f(x+h)) &= x + h + A^{-1}(y - f(x) - Df(x)(h) + o(\|h\|) \\ &= x + A^{-1}(y - f(x)) + h - A^{-1}Df(x)(h) + o(\|h\|) \\ &= F_y(x) + DF_y(x)(h) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

On a donc $DF_y(x) = I - A^{-1} \circ Df(x)$. On en déduit que $DF_y(0) = I - A^{-1}A = I - I = 0$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, par continuité, il existe $r > 0$ tel que si $\|x\| \leq r$ implique que $\|DF_y(x)\| \leq \varepsilon$. On choisit donc un r assez petit tel que $\overline{B_r} \subset U$.
On pose ensuite $W = \{y \in \mathbb{R}^n,\ \|A^{-1}y\| < (1-\varepsilon)r\}$. Soit $y \in W$. Soit $x \in \overline{B_r}$, alors on a

$$\begin{aligned} \|F_y(x)\| &\leq \|F_y(0)\| + \|F_y(x) - F_y(0)\| \\ &\leq \|A^{-1}y\| + \varepsilon\|x\| \qquad \text{inégalité de la moyenne} \end{aligned}$$

Comme $y \in W$, on a que $\|F_y(x)\| < (1-\varepsilon)r + \varepsilon r = r$. On en déduit que $F_y(\overline{B_r}) \subset B_r \subset \overline{B_r}$.
On pose $V = B_r \cap f^{-1}(W)$. Comme F_y est ε-lipschitzienne sur $\overline{B_r}$ (car $\|DF_y(x)\| \leq \varepsilon$ pour $x \in \overline{B_r}$), on en déduit que F_y est contractante de $\overline{B_r}$ dans elle-même si $i \in W$. Comme $\overline{B_r}$ est complet (car fermé), il en résulte que F_y admet un point fixe unique x dans $\overline{B_r}$, limite de la suite $x_{n+1} = F_y(x_n)$ avec $x_0 = 0$ par exemple.. L'ensemble W est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $y \in W$, il existe $x \in \overline{B_r}$ tel que $F_y(x) = x$, et donc $A^{-1}(y - f(x)) = 0$ et finalement $y = f(x)$. On a même x dans B_r car $F_y(x) = x$ et $F_y(\overline{B_r}) \subset B_r$.
Mais f n'est pas une bijection de B_r sur W, car il pourrait y avoir des $f(x)$ en dehors de W, on prends alors V qui permet que f soit une bijection de V sur W où V est un voisinage de 0.

On fait maintenant varier le paramètre y. Soit $y, y_0 \in W$ et soient $x, x_0 \in V$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$. On a donc

$$\begin{aligned} x - x_0 &= F_y(x) - F_{y_0}(x_0) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) + (F_y(x_0) - F_{y_0}(x_0)) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) + A^{-1}(y - y_0) \end{aligned}$$

Comme x, x_0 sont dans B_r, on a encore que F_y est ε-lipschitzienne et donc on a encore une fois

$$\|x - x_0\| \leq \varepsilon \|x - x0\| + \|A^{-1}\| \|y - y_0\|.$$

c'est-à-dire

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\varepsilon} \|y - y_0\|.$$

Donc f^{-1} est lipschitzienne sur W et donc continue sur W.
Encore une fois, si $x \in \overline{B_r}$, on a que $\|DF_y(x)\| \leq \varepsilon$ et comme $\varepsilon < 1$, la série de Neumann $\sum_{k=0}^{+\infty} (DF_y(x))^k$ converge car converge absolument dans un Banach. Elle a pour somme l'inverse de $I - DF_y(x) = A^{-1} \circ Df(x)$. On en déduit donc que $Df(x)$ est inversible.

On y est presque. Il reste à montrer que f^{-1} est différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ sur W.
Soient $y, y_0 \in W$ et $x, x_0 \in V$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$. La différentielle de f en x_0 s'écrit

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + R$$

avec $R = o(\|x - x_0\|)$ c'est-à-dire : pour tout $\eta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x - x_0\| \leq \alpha$ entraîne $\|R\| \leq \eta \|x - x_0\|$.
D'après 5, on a $\|x - x_0\| \leq C\|y - y_0\|$ avec $C = \frac{\|A^{-1}\|}{1-\varepsilon}$ qui est une constante. On a donc que $\|y - y_0\| \leq \alpha / C$ entraîne

$$\|R\| \leq \eta \|x - x_0\| \leq \eta C \|y - y_0\|.$$

On a donc que le reste $o(\|x - x_0\|)$ est aussi un $o(\|y - y_0\|)$, d'où

$$Df(x_0)(x - x_0) = y - y_0 + o(\|y - y_0\|).$$

Comme $Df(x_0)$ est inversible, on en déduit

$$x - x_0 = f^{-1}(y_0 + (y - y_0)) - f^{-1}(y_0) = Df(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

On a alors que f^{-1} est différentiable en y_0 avec $Df^{-1}(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.
Enfin, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur W, car l'application $y \mapsto Df^{-1}(y)$ est la composée des trois applications continues

$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \mapsto Df(x) \mapsto Df(x)^{-1} = Df^{-1}(y).$$

La dernière est le passage à l'inverse d'une matrice, qui est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.